第一章　GR 理论基础

1.1　度规

在广义相对论中，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 描述了时空的几何性质。它定义了两个事件之间的距离（或间隔），并且可以用来计算物体在引力场中的运动。度规张量的形式可以根据具体的时空结构而变化，例如在平坦时空中，度规张量为闵可夫斯基度规：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一般的，度规可以用来计算两个事件之间的间隔 ds^2：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

1.2　协变微商与逆变微商

协变微商（Covariant Derivative）和逆变微商（Contravariant Derivative）是广义相对论中用于描述张量场变化的工具。它们考虑了时空的曲率，确保在曲率时空中张量的导数仍然是张量。

协变微商的定义为：

$$\nabla_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_m} = \partial_\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_m} + \sum_{i=1}^{k} \Gamma^{\alpha_i}_{\mu\nu} T^{\alpha_1\cdots\nu\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_m} - \sum_{j=1}^{m} \Gamma^{\nu}_{\mu\beta_j} T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\nu\cdots\beta_m}$$

逆变微商的定义为：

$$\nabla^\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_m} = \partial^\mu T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_m} - \sum_{i=1}^{k} \Gamma^{\alpha_i}_{\nu\beta_j} T^{\alpha_1\cdots\nu\cdots\alpha_k}_{\beta_1\cdots\beta_m}$$

特别的，对于逆变矢量场和协变矢量场，有以下关系：

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda$$

这里面的 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 是 Christoffel 符号，定义为：

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right)$$

1.3 黎曼流形

黎曼流形是一个光滑流形，配备了一个正定的度规张量 $g_{\mu\nu}$，用于测量流形上点之间的距离和角度。黎曼流形的主要特点包括无挠条件和度规相容条件。

无挠条件确保了 Christoffel 符号的对称性：

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

度规相容条件要求协变微商作用于度规张量时保持度规不变：

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$$

无挠联络的 Christoffel 符号可以通过度规张量唯一确定。

1.4 曲率张量

曲率张量一般由微商的对应性定义。设 V 是一个切空间中的向量，∇ 是与度规相容的无挠联络，则曲率张量 R 定义为：

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} V^\lambda = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\lambda$$

曲率张量描述了流形的局部几何性质，反映了平行移动的非平行性。

另外的，Ricci 张量 $R_{\mu\nu}$ 是曲率张量的一个缩并，定义为：

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$$

曲率标量 R 是 Ricci 张量的进一步缩并，定义为：

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

1.5 爱因斯坦场方程

爱因斯坦场方程描述了时空的几何结构与物质和能量的分布之间的关系。它的形式为：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

或者可以写成另一种形式：

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$$

其中：

- $R_{\mu\nu}$ 是 Ricci 张量，描述了时空的曲率。
- R 是曲率标量，是 Ricci 张量的迹。
- $g_{\mu\nu}$ 是度规张量，描述了时空的几何性质。
- $T_{\mu\nu}$ 是能量-动量张量，描述了物质和能量的分布。
- T 是能量-动量张量的迹，定义为 $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$。

1.6 变分原理求测地线方程

测地线方程描述了在给定度规下，连接两个点的最短路径。通过变分原理，可以从测地线的作用量出发，推导出测地线方程。测地线的拉氏量为：

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

其中，λ 是参数化变量。测地线的作用量为：

$$S = \int L\, d\lambda = \frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\, d\lambda$$

通过对作用量进行变分，得到测地线方程：

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

1.7 牛顿近似

在弱引力场和低速条件下，广义相对论可以简化为牛顿引力理论。通过对爱因斯坦场方程进行线性化处理，可以得到牛顿近似。核心的三个近似条件为：

- 引力场是静态的，即度规不随时间变化，$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$。
- 引力场是弱的，即 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$，其中 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$。
- 物体的速度远小于光速，即 $\frac{dx^i}{dt} = |v| \ll c \Rightarrow \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$。

在这样的近似条件下，测地线方程简化为：

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} \\
&= \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{0i}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau} + \Gamma^\mu_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} \\
&\approx \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} \quad \text{(忽略高阶小量)}
\end{aligned}
$$

联络简化为：

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\mu_{\nu\rho} &= \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \approx \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial_\nu h_{\rho\sigma} + \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\nu\rho}) \\
\Rightarrow \Gamma^\mu_{00} &\approx -\frac{1}{2}\eta^{\mu i}\partial_i h_{00} = -\frac{1}{2}\delta^{\mu i}\partial_i h_{00} (\text{即 } \mu \text{ 只能取空间指标})
\end{aligned}
$$

因此，测地线方程变为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \text{不失一般性，设 } dt = d\tau\text{，则 } x^0 = cd\tau \\
\dfrac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00}\left(\dfrac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2x^i}{dt^2} = \dfrac{1}{2}c^2\eta^{ij}\partial_i h_{00}
\end{cases}
$$

对比牛顿力学：

$$
\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i\Phi
$$

可得：

$$
\Phi = -\frac{1}{2}c^2 h_{00} = -\frac{GM}{r}
$$

1.8 场方程系数的确定

原则上，爱因斯坦场方程的只能告诉我们时空曲率与能量-动量张量之间的关系，但无法确定具体的系数。为了确定这些系数，我们可以通过牛顿近似来进行推导。

考虑引力源为非相对论性质的理想流体且宏观静止（$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dx^0dx^0 = -c^2d\tau^2$），即：

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$

而仅有 T^{00} 分量非零，则 $T^{00} = \rho\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} = -\frac{\rho c^2}{g_{00}} \approx \rho c^2$。

$$\Rightarrow T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = g_{00}T^{00} = \rho u^\mu u_\mu \approx -\rho c^2$$

所以引力场方程

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \Rightarrow R_{00} = \kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right)$$

又有：

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \\
&\approx \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \quad \text{(忽略高阶小量)} \\
\Rightarrow R_{00} &\approx \partial_i\Gamma^i_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{0\lambda} \approx \partial_i\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\partial_i\partial_i h_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \\
&\Rightarrow -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \kappa\left(\rho c^2 - \frac{1}{2}\rho c^2\right) \\
&\Rightarrow \nabla^2 h_{00} = -\kappa\rho c^2
\end{aligned}$$

带入 $h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2}$ 可得：

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{2}\kappa\rho c^4$$

对比泊松方程 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$，可得：

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

1.9 曲率张量的性质

曲率张量 $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}R^\lambda_{\beta\mu\nu}$ 具有以下性质：

- 反对称性：$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$，$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$
- 对称性：$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$
- Ricci 张量对称性：$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$

两个重要的恒等式：

- 第一 Bianchi 恒等式：$R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} + R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} + R^{\lambda}_{\nu\rho\mu} = 0$
- 第二 Bianchi 恒等式：$\nabla_\sigma R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} + \nabla_\mu R^{\lambda}_{\rho\nu\sigma} + \nabla_\nu R^{\lambda}_{\rho\sigma\mu} = 0$

Einstein 张量定义为：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

并且满足 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$。

证明：由第二 Bianchi 恒等式，取 $\lambda = \mu$ 并对 μ 求和，有

$$\nabla_\sigma R_{\rho\nu} - \nabla_\nu R_{\rho\sigma} + \nabla_\mu R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} = 0$$

对上式再左右乘 $g^{\sigma\rho}$ 有

$$\nabla_\mu R^\mu_\nu - \nabla_\nu R + \nabla_\sigma R^\sigma_\nu = 0 \Rightarrow 2\nabla_\mu R^\mu_\nu - \nabla_\nu R = 0 \Rightarrow \nabla_\mu R^\mu_\nu = \frac{1}{2}\nabla_\nu R \Rightarrow \nabla_\mu G^\mu_\nu = 0$$

1.10 引力场作用量

引力场的作用量通常表示为爱因斯坦-希尔伯特作用量，形式为：

$$S = \frac{c^4}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{c}\int_M \mathcal{L}_m \sqrt{-g}\, d^4x$$

第一项是引力场的作用量，描述引力场自己的动力学；第二项是物质场的作用量，$\mathcal{L}_m$ 是物质场的拉氏量密度，描述了物质场对引力场的贡献。

$$\delta(R\sqrt{-g}) = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g}) = (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\delta\sqrt{-g})$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$$

1.11 能量-动量张量

能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$ 描述了物质和能量在时空中的分布和流动。它是一个对称的二阶张量，包含了能量密度、动量密度以及应力等信息。

特别的：

- 运动质点的能量-动量张量：

$$T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu}$$

- 理想流体的能量-动量张量：

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2}) u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}$$

- 电磁场的能量-动量张量：

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$